Datos generales[1]							
Plantel	34 Alan Sac´Jun	**Coordinación**	Selva		**Semestre**	Quinto
Ubicación del plantel	Alan Sac´ Jun	**UAC**	Taller de Probabilidad y Estadística I			

Datos de la progresión del aprendizaje[2]			
Etapa de la progresión (Número)	04	**Tiempo total de ejecución**	4 horas
Enunciado de la progresión	Explora los resultados de diferentes experimentos probabilísticos para entender el concepto de función de distribución y su importancia en el modelado de fenómenos presentes en su contexto.		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje[3]	
Categoría	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento **C3.** Solución de problemas y modelación
Subcategoría	**C2S2.** Pensamiento intuitivo **C3S2.** Construcción de modelos

[1] Ingrese los datos generales de su centro de trabajo y de la Unidad de Aprendizaje Curricular
[2] Ingrese los datos de la progresión de aprendizaje a desarrollar
[3] Ingrese los elementos presentes en la progresión de aprendizaje a desarrollar

Metas de aprendizaje.	**C2M3.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos. **C3M1.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnologías, sociales, humanidades y de la vida cotidiana. - Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas

Abordaje de la progresión del aprendizaje[4]				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	**Actividad 1:** La o el docente realiza la aplicación de un examen diagnóstico con el propósito de identificar los conocimientos previos del estudiantado sobre los conceptos básicos de probabilidad: experimento aleatorio, espacio muestral, evento, y variables aleatorias (discretas y continuas). Este instrumento nombrado como **Anexo 1** permitirá conocer el nivel de comprensión inicial y orientar las estrategias de enseñanza para fortalecer los aprendizajes en el tema. **Actividad 2:** La o el docente retroalimenta al estudiantado a partir de los resultados obtenidos en el examen diagnóstico, aclarando dudas, reforzando conceptos clave y proporcionando ejemplos prácticos que permitan afianzar la comprensión de los temas evaluados.	60 minutos	Hojas blancas, pizarrón, plumones.	No aplica.

[4] Planteé una estrategia didáctica para abordar la progresión de aprendizaje que fue seleccionado.

Desarrollo	**Actividad 3**.- La o el docente, con base en la información presentada en el **Anexo 2**, introducirá el tema a los estudiantes mediante una presentación elaborada en **PowerPoint**, **lectura guiada o clase a pizarrón** enfatizando los aspectos más relevantes para la comprensión del contenido, asimismo como los ejemplos. Posteriormente, presentará el siguiente video: https://youtu.be/DGvGIwWz_sQ, el cual servirá como complemento visual y auditivo para reforzar los conceptos abordados. Durante la visualización del video, el estudiantado deberá **tomar notas** de los puntos clave, definiciones importantes, ejemplos presentados y cualquier información que considere esencial para su aprendizaje. Estas notas serán revisadas, evaluadas y utilizadas en una discusión grupal o en una actividad de retroalimentación para asegurar que todos hayan comprendido el material expuesto.	120 minutos	Laptop, cañón.	**Lista de cotejo.**
Cierre	El estudiantado, organizados en equipos de trabajo colaborativo, deberán resolver tres ejercicios **Anexo 3** relacionados con el tema previamente expuesto. Durante esta etapa, se fomentará la participación activa, la distribución equitativa de responsabilidades y el uso de estrategias de análisis y razonamiento para llegar a las soluciones. Cada grupo deberá documentar el procedimiento seguido, justificando los pasos realizados y las decisiones tomadas en la resolución de los ejercicios. Una vez finalizado el trabajo, los equipos presentarán sus resultados frente al resto de la clase, explicando de manera clara y ordenada la metodología empleada, así como las conclusiones obtenidas.	60 minutos.	Cuadernos, lápices, papel bond.	**Lista de cotejo.**

Fuentes de consulta		
BIBLIOGRÁFICA	**VIDEOGRÁFICA**	**PÁGINAS WEB**
Bèi, D. (2025). *Taller de probabilidad y estadística I* (1. ª ed.; Serie KlikNEM - BG). Klik Soluciones Educativas S. A. de C. V. https://www.kse.mx		Matemóvil. (s. f.). *Función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua*. Recuperado el 14 de agosto de 2025, de https://matemovil.com/funcion-de-distribucion-acumulativa-de-una-variable-aleatoria-continua/

ELABORO: REVISO:

Neyser Darío Constantino López Gutemberg Ramírez
Gálvez Rigoberto Vázquez Suriano Humberto Aquino
Espinosa Pascual López Peñate Richard Silvan Magaña
Marco Antonio Méndez Sotomayor

Anexo 1: Examen Diagnóstico "Conceptos básicos previos de probabilidad"

Nombre: ______________________________________sem/grupo: _____Fecha: __________

Instrucciones: Lee cuidadosamente cada pregunta y responde según se indique. En las preguntas de opción múltiple, selecciona la letra que corresponda a la respuesta correcta. En las preguntas de respuesta corta, escribe tu respuesta de forma clara y completa.

A. (Opción múltiple)

1.- ¿Cuál de las siguientes opciones describe correctamente un experimento aleatorio?
a) Medir la longitud exacta de una mesa previamente fabricada.
b) Lanzar un dado y observar el número que aparece.
c) Calcular el área de un rectángulo conocido.
d) Medir con exactitud el peso de una caja cerrada.

2.- El **espacio muestral (S)** de lanzar una moneda una vez es:
a) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
b) {cara, cruz}
c) {cara}
d) {ninguno}

3.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe un **evento**?
a) {2, 4, 6} al lanzar un dado.
b) {cara, cruz} al lanzar una moneda.
c) El conjunto de todos los números enteros.
d) La temperatura exacta en un momento determinado.

4.- Una **variable aleatoria discreta** se caracteriza por:
a) Tomar infinitos valores dentro de un intervalo.
b) Tener solo valores finitos o contables.
c) No depender de un experimento aleatorio.
d) No poder representarse numéricamente.

5.- ¿Cuál de las siguientes opciones es un ejemplo de **variable aleatoria continua**?
a) Número de autos que pasan por un puente en una hora.
b) Altura de los estudiantes en una clase.
c) Número de veces que sale "cara" al lanzar una moneda.
d) Puntos obtenidos en un examen de 10 preguntas.

6.- En el lanzamiento de dos monedas, ¿cuál sería el valor de la variable aleatoria "número de caras obtenidas" si ambas muestran cruz?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

B. (Respuestas cortas)

7.- Define con tus propias palabras **experimento aleatorio** y proporciona un ejemplo.

8.- Escribe el espacio muestral de lanzar un dado común de seis caras.

9.- Explica con un ejemplo la diferencia entre **espacio muestral** y **evento**.

10.- Da un ejemplo propio de **variable aleatoria discreta** y otro de **variable aleatoria continua**.

C.- (Pregunta inferencial)

11.- Si en una encuesta a 50 personas se mide el tiempo (en minutos) que esperan el transporte público, y los valores varían entre 2 y 20 minutos, ¿considerarías el tiempo de espera como una **variable aleatoria discreta** o **continua**? Justifica tu respuesta.

Anexo 2.- información "Función de probabilidad"

En el estudio de la probabilidad, los **experimentos aleatorios** nos permiten recopilar datos sobre fenómenos cuyo resultado no puede preverse con certeza. Estos datos pueden organizarse y representarse mediante **funciones de distribución**, que describen la probabilidad acumulada de que una variable aleatoria tome valores menores o iguales a un número dado.

El análisis de funciones de distribución no solo es un ejercicio teórico, sino que también permite modelar y predecir comportamientos en situaciones reales, como el tiempo de espera de un servicio, el rendimiento académico, la demanda de un producto o la medición de variables naturales.

Las aplicaciones de matemáticas dinámicas como **GeoGebra** y **Desmos** permiten simular experimentos, graficar distribuciones y visualizar de forma interactiva cómo cambia la probabilidad acumulada, favoreciendo una comprensión más profunda del tema.

Variable aleatoria

En los experimentos aleatorios los resultados pueden representarse mediante variables Aleatorias, que no siempre toman valores enteros, éstas se dividen en:
1.- Una variable aleatoria discreta es la que toma un número finito o numerable de Valores.
2.- Una variable aleatoria continua es la que puede asumir un número infinito no numerable de valores dentro de un intervalo.

Una variable aleatoria como una función es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento del espacio muestral E, un único valor perteneciente al campo de los números reales R. Según la notación de funciones, esta correspondencia se escribe como: $\mathbf{f: E \rightarrow R}$
En ocasiones, todas las probabilidades de una variable aleatoria se representan con una fórmula. A la función en la cual se describen todas las probabilidades de los valores de una variable aleatoria X se le denomina función de probabilidad o distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.
A cada valor x que toma la variable aleatoria, la función le asigna su probabilidad de ocurrencia, esto se representa como: $f(x) = P(X = x)$

Para cada valor x de la variable aleatoria X se cumple que:
$0 \leq P(X = x) \leq 1 \; \Sigma P$
$(X = x) = 1$

Es decir, las probabilidades están entre 0 y 1 y la suma de las probabilidades asignadas a todos los valores de la variable aleatoria es igual a 1. Estas probabilidades generalmente se representan en una tabla de distribuciones de probabilidad como en el ejemplo anterior.

Función de distribución acumulativa

La función de distribución acumulativa es la función que para un valor x, nos da la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que dicho valor x. A la función de distribución acumulativa la denominamos F(x).

A continuación, viene la definición formal:

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f(x). La función de distribución acumulativa de X es la función:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

De forma gráfica, F(x) es el área bajo la curva de densidad a la izquierda de x. Recordemos que cuando trabajamos con la función de densidad, área es probabilidad.

Además, tenemos algunas fórmulas interesantes que nos servirán para resolver los problemas.

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$
$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \quad ; \quad a < b$$

La siguiente fórmula nos permite pasar de la función de distribución acumulativa a la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Recuerda también que, al ser una función acumulativa, esta no puede ser decreciente.

Ejemplo 1

Construye una tabla de distribuciones de probabilidad para la variable aleatoria discreta X que representa la cantidad de águilas (C) que se obtiene al lanzar tres monedas normales al aire.

Solución

El espacio muestral de 8 elementos es:

E = {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}

Con esto se nota que los valores x que la variable aleatoria X puede tomar son 0, 1, 2 y 3.

La probabilidad de que X = 0 equivale a que no salga águila, o sea SSS, y su probabilidad **será:**

$$P(X=0)=\frac{1}{8}$$

Para que $X=1$ se debe cumplir cualquiera de las siguientes **3** posibilidades: CSS, SCS y SSC, con lo que su probabilidad es:

$$P(X=1)=\frac{3}{8}$$

De forma similar para que ocurra X = 2 se deben considerar los casos, **CCS, SCC y CSC, donde:**

$$P(X=2)=\frac{3}{8}$$

Finalmente, para que se cumpla que X = 3 se tendrá el caso CCC, cuya probabilidad es:

$$P(X=3)=\frac{1}{8}$$

La tabla de distribución de probabilidad es:

E	X	$P(X)$
SSS	0	1/8
CSS, SCS, SSC	1	3/8
CCS, SCC, CSC	2	3/8
CCC	3	1/8
		$\sum P(X) = 1$

Ejemplo 2:

Una tienda vende discos duros de 1 TB, 2 TB y 3 TB de capacidad. Encontrar la función de distribución de acumulativa de X, sabiendo que X = la capacidad de memoria en un disco duro comprado:

x	$f(x)$
1	0.5
2	0.3
3	0.2

Solución:

Nos piden encontrar la función de distribución acumulativa de X, entonces recordemos la fórmula:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Primero vamos a encontrar *F(x)* para cada uno de los posibles valores de *X*:

- $F(1) = P(X \leq 1) = f(1) = 0{,}5$
- $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1 \text{ o } 2) = f(1) + f(2) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$
- $F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1, 2 \text{ o } 3) = f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$

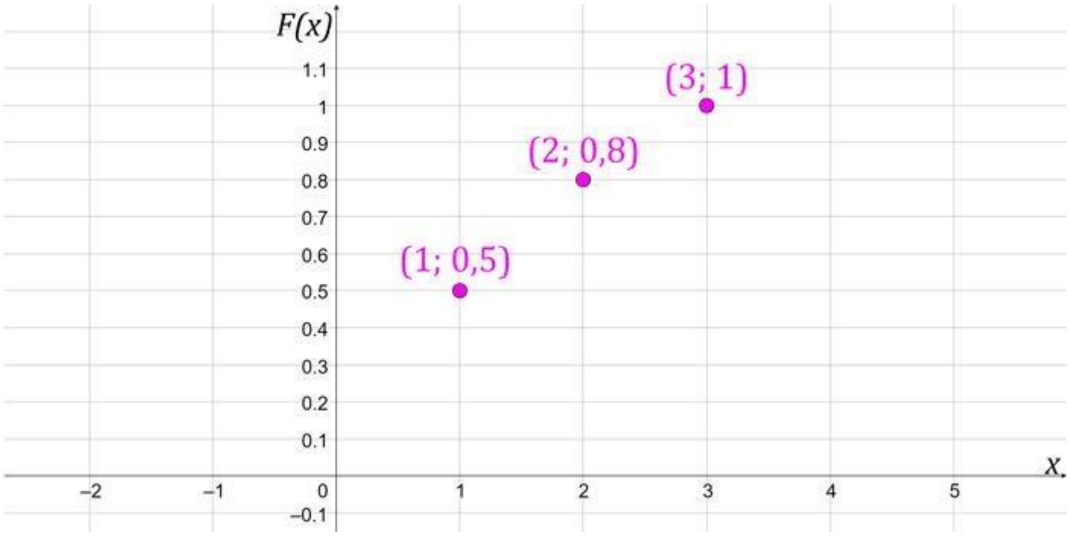
Completamos la tabla:

x	$f(x)$	$F(x)$
1	0,5	0,5
2	0,3	0,8
3	0,2	1
Σ	1	

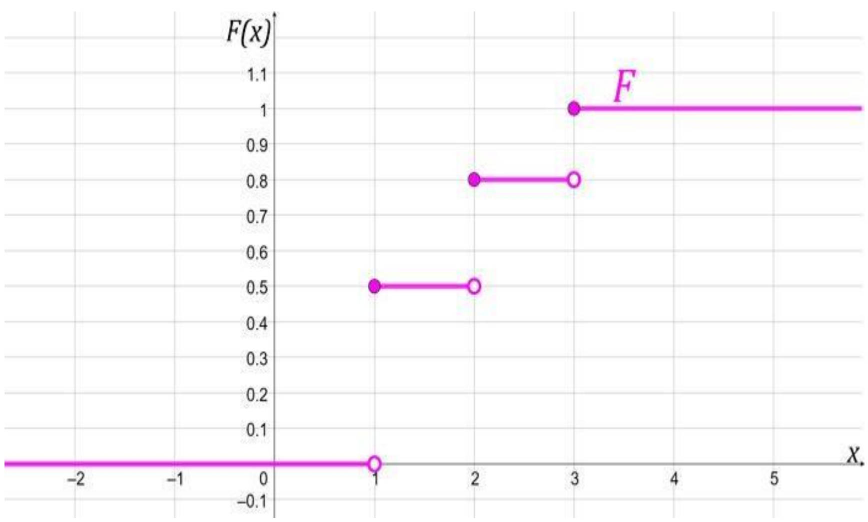
Vamos a borrar la columna *f(x)* para no generar confusión:

x	$F(x)$
1	0,5
2	0,8
3	1

A continuación, elaboramos la gráfica de *x* vs *F(x)*:



En la gráfica, colocamos líneas continuas entre los valores, partiendo desde el lado izquierdo:



Y listo, solo nos queda definir la función *F(x)* a partir de la gráfica:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ 0{,}5; & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}8; & 2 \leq x < 3 \\ 1; & x \geq 3 \end{cases}$$

Ejemplo 3

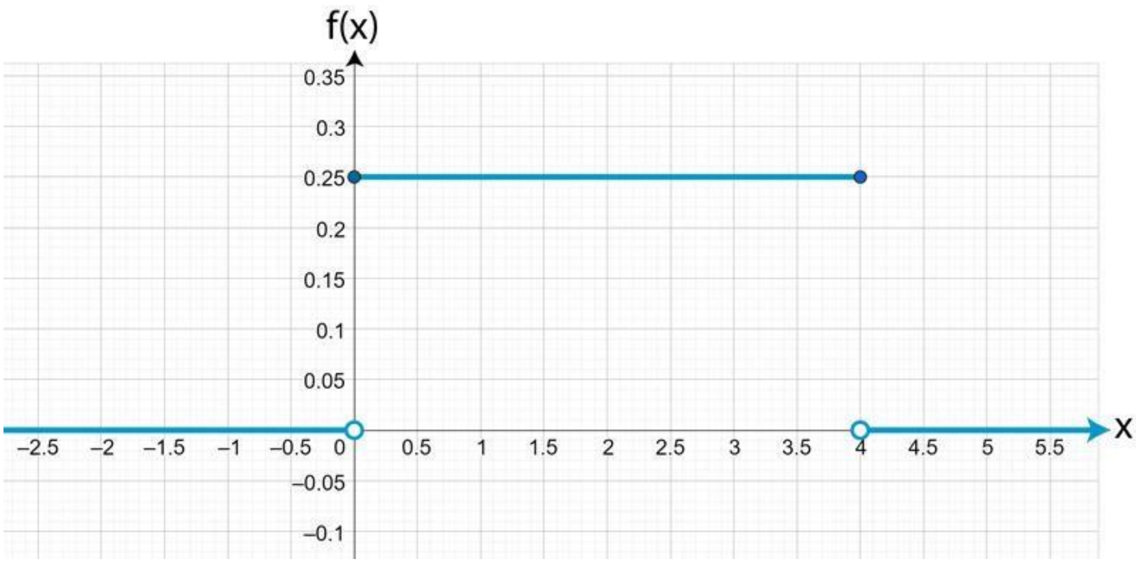
La variable aleatoria continua *X* tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}25; & si \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \quad ; & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Definir y graficar la función de distribución acumulativa de *X*.

Solución:

Iniciamos graficando la función de densidad para no meternos en problemas.



Como se ve en la gráfica, la curva de densidad tiene 3 tramos bien marcados. Vamos a calcular el valor de *F(x)* en cada uno de los tramos empleando la siguiente fórmula:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Vuelvo a colocar la colocar la misma función de densidad f(x), pero esta vez como f(t), es lo mismo, no te preocupes.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}25; & si \quad 0 \leq t \leq 4 \\ 0 \quad ; & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Partimos con el primer tramo:

Parte 1: *si x > 4*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

Parte 2: *si 0 ≤ x ≤ 4*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} 0{,}25\ dt$$

$$F(x) = 0 + 0{,}25t \Big|_{0}^{x} = 0{,}25(x - 0) = 0{,}25x$$

Parte 3: *si x > 4*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{4} 0{,}25\,dt + \int_{4}^{x} 0\,dt$$

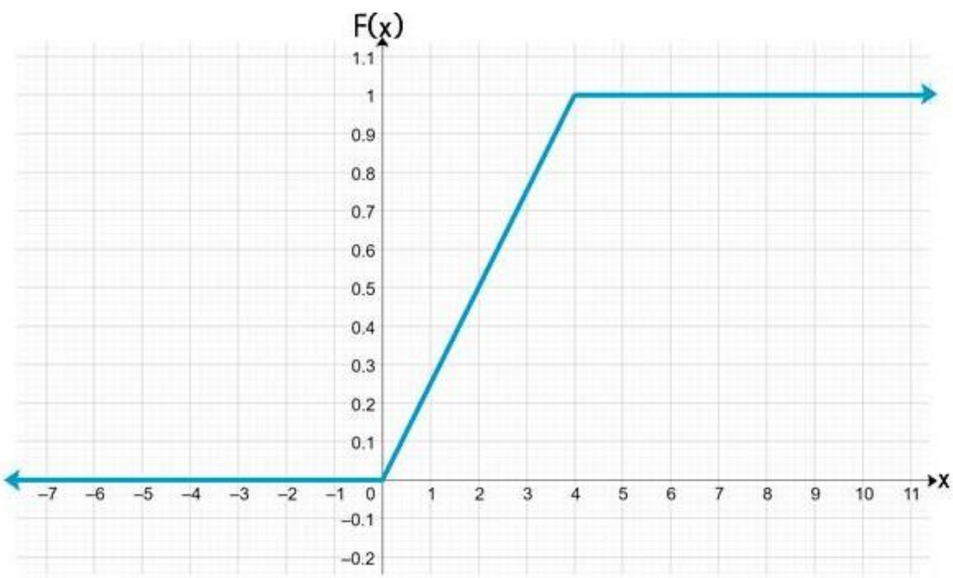
$$F(x) = 0 + 0{,}25t\,\Big|_0^4 + 0$$

$$F(x) = 0{,}25(4-0) = 1$$

Finalmente, definimos *F(x)*.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;; & si\ x < 0 \\ 0{,}25x \;; & si\ 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \;; & si\ x > 4 \end{cases}$$

Terminamos con la gráfica de *F(x)*.



Anexo 3: El estudiantado organizado en equipo resuelve los ejercicios propuestos

1.- Se realiza un estudio que busca información de la estatura de los jugadores de la NBA en toda su historia. Indica la variable aleatoria de interés, sus posibles valores e indica si es discreta o continua.

2.- Sea X el número de gatitos vendidos en una tienda por día en una veterinaria. Encontrar la función de distribución acumulativa de X a partir de su función de probabilidad.

x	$f(x)$
0	0,5
1	0,3
2	0,2

3.- Determinar si la siguiente es una función de probabilidad. En caso de serlo realizar la tabla de distribución de probabilidades.

$$f(x) = \frac{x^2+5}{50} \quad x = 1, 2, 3, 4$$

COMPONENTE FUNDAMENTAL EXTENDIDO “TALLER DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I”

“2025, Año de Rosario Castellanos Figueroa, Por la Paz y Justicia de los Pueblos de Chiapas”

INSTRUMENTOS DE EVALUACION

Lista de cotejo para evaluar

Los apuntes del video

Nombre del alumno:	Fecha:	
INDICADORES	Sí	No
1.- El trabajo indica nombre de la actividad, fecha, nombre del alumno (en la parte de arriba)		
2.- respeta la estructura y el oren de los contenidos del video observado.		
3.- posee todo el contenido observado en el video		
4.- entrega en el tiempo indicado por el maestro		
5.- tomo en cuenta todos los ejemplos		

Lista de cotejo para evaluar

Ejercicios

INDICADORES	Sí	No

1.- Resuelve correctamente los tres ejercicios		
2.- aplica de manera correcta cada una de las formulas		
3.- usa correctamente las notaciones matemáticas		
4.- usa tablas y graficas		
5.- identifica el concepto de función de distribución		
6.- identifica el concepto de variable aleatoria		

Datos generales[1]					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Quinto
Ubicación del plantel	Alan Sac´jun, Mpio de chilon	**UAC**	Taller de Probabilidad y Estadística I		

Datos de la progresión del aprendizaje[2]			
Etapa de la progresión (Número)	5	**Tiempo total de ejecución**	5 hrs.
Enunciado de la progresión	Conoce e interpreta la **esperanza matemática** comparando de forma colaborativa diversos resultados de experimentos y situaciones, con los obtenidos analíticamente para identificar su importancia en la toma de decisiones sobre eventos probabilísticos diversos. **C1M2, C2M2, C4M2.**		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje[3]	
Categoría	**C1:** Procedural **C2:** Procesos de intuición y razonamiento. **C4:** Interacción y lenguaje matemático.
Subcategoría	**C1S4:** Manejo de datos e incertidumbre. **C2S2:** Pensamiento intuitivo. **C4S2:** Negociación de significados.
Metas de aprendizaje.	**C1M2:** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su

	contexto.

[1] Ingrese los datos generales de su centro de trabajo y de la Unidad de Aprendizaje Curricular
[2] Ingrese los datos de la progresión de aprendizaje a desarrollar
[3] Ingrese los elementos presentes en la progresión de aprendizaje a desarrollar

	C2M2: Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **C4M2**: Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal. - Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.) - Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Abordaje de la progresión del aprendizaje[4]				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	A través de una lluvia de ideas, el/la docente rescata los conocimientos previos del estudiantado sobre la esperanza matemática, preguntándoles si alguna vez han participado en algún juego de azar donde hayan apostado y si tenían la certeza de que ganarían. El/la docente, apoyándose en el **anexo 1**, presentan al estudiantado la definición de "esperanza matemática", donde se utiliza y un ejemplo de aplicación práctica de la misma.	60 minutos.	Proyector, pizarrón, plumones.	No aplica.

[4] Planteé una estrategia didáctica para abordar la progresión de aprendizaje que fue seleccionado.

Desarrollo	El estudiantado integrado en equipos de 3, y previa solicitud de que lleven un dado por cada equipo se les plantea la misma situación del ejemplo del **anexo 1** pero con la variante que para esta ocasión los equipos realicen la actividad tirando el dado 25 veces y registren sus valores obtenidos en la **tabla 1** del (**anexo 2**). El/la docente concentrará los datos obtenidos de cada equipo en la **tabla 2** del (**anexo 2**) y se lo proporcionaran a cada equipo.	120 minutos.	Pizarrón, plumones, Cuaderno, lápiz.	No aplica.
Cierre	El estudiantado procederá a hacer los mimos cálculos del ejemplo presentado por el/la docente y obtendrá lo siguiente: a) Lo que se espera ganar en el juego b) El pago del juego c) Calculo de la esperanza matemática. Es importante retroalimentar a los equipos para verificar si sus cálculos fueron correctos, en caso contrario se debe aclarar las dudas que se generen. Adicional a la actividad en equipos el estudiantado resolverá la serie de ejercicios proporcionado por el/la docente para afianzar el concepto y el cálculo de la esperanza matemática (**anexo 3**). Para esta evaluación formativa se utiliza una lista de cotejo para la actividad en equipo y otra lista de cotejo para la serie de ejercicios (**Anexo 4**).	120 minutos.	Pizarrón, plumones, Cuaderno, Lápiz, Calculadora.	Lista de cotejo. Lista de cotejo.

Fuentes de consulta		
BIBLIOGRÁFICA	**VIDEOGRÁFICA**	**PÁGINAS WEB**
- Freund, J. & Simon, G. (1994). Estadística Elemental - Octava Edición. México: Pearson. - Rincón, L. (2013). Introducción a la probabilidad. México. UNAM.		- Treviño, H. G., de Haro, J. J. O., & García, J. M. C. (2017). Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. Avances de investigación en educación matemática, (11), 107-125 Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6168896.pdf - UED - Uniandes Colombia. (2024, 8 febrero). Conocimientos sobre esperanza matemática en alumnos de bachillerato - Funes. Funes. - https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/conocimientos- sobreesperanza-matematica-en-alumnos-de-bachillerato/

ELABORO: REVISO:

Neyser Darío Constantino López
Rigoberto Vázquez Suriano
Pascual López Peñate
Marco Antonio Méndez Sotomayor

Gutemberg Ramírez Gálvez
Humberto Aquino Espinoza
Richard Silvan Magaña

Anexo 1.

Definición: La esperanza matemática o valor esperado es un concepto fundamental en la teoría de la probabilidad y la estadística. Representa el valor promedio ponderado que se espera obtener en un experimento aleatorio, teniendo en cuenta las probabilidades de los diferentes resultados posibles.

En términos sencillos, es el "promedio" ponderado de todos los posibles valores que una variable aleatoria puede tomar.

La esperanza matemática se utiliza para tomar decisiones informadas en situaciones donde el resultado es incierto, como en juegos de azar, inversiones, seguros.

En juegos de azar: permite evaluar si un juego es favorable para el jugador, si la esperanza matemática es mayor que 1, es favorable.

En inversiones: ayuda a estimar el rendimiento esperado de una inversión.

En seguros: permite calcular la prima de seguro justa, es decir, la cantidad que se debe cobrar para cubrir los posibles pagos y obtener una ganancia razonable.

En la toma de decisiones: en general ayuda a evaluar las consecuencias a largo plazo de diferentes opciones, considerando las probabilidades de cada resultado

Formula:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P[X = x_i]$$

dónde:

$E[X]$= la esperanza matemática.

$n =$ cantidad de veces que se hace el experimento o evento.

x_i = el valor de x (ganancia) para cada caso i

$P[X = x_i]$= Probabilidad del caso x_i

Ejemplo: Un grupo de 5° semestre del Cobach se dividió en equipos de 3 integrantes se puso a jugar un juego de azar que involucra un dado de 6 caras, donde uno de ellos es el que diseño el juego, otra es la persona apostadora y la tercera es la que llevo el registro de los tiros, las reglas del juego son las siguientes:

1. Si se saca un 6 te pagan el triple de tu apuesta.
2. Si se saca un 5 te duplican tu apesta
3. Si se saca cualquier otro número, pierdes tu apuesta

Cuanto puedes ganar o perder a largo plazo con una apuesta de $10.00 si por cada tiro necesitas apostar $1.00

Nota: Es importante hacerles mención que los juegos de azar con apuestas no son recomendables.

Cada equipo realizo 25 tiros que se registraron en la siguiente tabla.

Cara del dado	**Frecuencia con la que aparece**			
	Equipo 1	**Equipo 2**	**Equipo 3**	**Equipo n**
1	7	4	2	3
2	5	4	1	6
3	4	4	6	2
4	1	4	2	4
5	5	4	7	6
6	3	5	7	4
Total de ocurrencias	25	25	25	25

Concentrado de datos de todo el grupo:

Cara del dado	Frecuencia con la que aparece	Probabilidad frecuentista	¿Cuánto se recibe?
1	16	0.16	0
2	16	0.16	0
3	16	0.16	0
4	11	0.11	0
5	22	0.22	2
6	19	0.19	3
Total de ocurrencias:	100	1	

Contesta los siguientes cuestionamientos:

a) ¿Cómo obtendremos lo que se espera ganar en el juego?
b) ¿Cuál es el pago del juego?
c) Calcular la esperanza matemática.

Respuestas:

a) $(\$0)(0.16) + (\$0)(0.16) + (\$0)(0.16) + (\$0)(0.11) + (\$2)(0.22) + (\$3)(0.19) =$

$(\$1.01)(10) = \$10.10$

b) $\$10.10 - (\text{costo por jugar}) = \$10.10 - \$10 = \$0.10$ por juego.

Calculo de la esperanza matemática:

Cara del dado	Probabilidad de que aparezca esa cara	Ganancia si aparece esa cara	Lo que se espera ganar
1	1/6	0	(1/6)(0)=0
2	1/6	0	(1/6)(0)=0
3	1/6	0	(1/6)(0)=0
4	1/6	0	(1/6)(0)=0
5	1/6	2	(1/6)(2)= 2/6
6	1/6	3	(1/6)(3)=3/6
Total	1	NA	Σ = 5/6=0.83

Se concluye el ejemplo considerando con el grupo de acuerdo a los valores obtenidos si es favorable para el jugador participar en él o no.

Anexo 2.

Se divide el grupo en equipos de 3 integrantes para que realicen el juego de azar con el dado de 6 caras, uno de ellos asumirá el rol del que diseño el juego, otro será la persona apostadora y la tercera es la que llevará el registro de los tiros, las reglas del juego son las siguientes:

1. Si se saca un 6 te pagan el triple de tu apuesta.
2. Si se saca un 5 te duplican tu apesta
3. Si se saca cualquier otro número, pierdes tu apuesta

Cuanto puedes ganar o perder a largo plazo con una apuesta de $10.00 si por cada tiro necesitas apostar $1.00

Tabla 1. Concentrado de frecuencia por equipo con lo que aparece cada cara del dado en los 25 tiros.

Cara del dado	**Frecuencia con la que aparece**			
	Equipo 1	**Equipo 2**	**Equipo 3**	**Equipo n**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total de ocurrencias				

Tabla 2. Concentrado de datos de todo el grupo.

Cara del dado	Frecuencia con la que aparece	Probabilidad frecuentista	¿Cuánto se recibe?
1			
2			
3			
4			
5			
6			
Total de ocurrencias:			

obtener lo siguiente:

a) Lo que se espera ganar en el juego

b) El pago del juego

c) Calculo de la esperanza matemática.

Anexo 3.

Serie de ejercicios.

1. Un jugador lanza dos monedas. Gana 1 ó 2 pesos si aparecen una o dos caras. Por otra parte, pierde 5 pesos si no aparece cara. Determinar la esperanza matemática del juego y si éste es favorable.

   Respuesta:
   $E[x] = -\frac{1}{4}$
   Por lo tanto, no es favorable

2. Un jugador lanza dos monedas. Pierde 2 ó 1 peso si aparecen dos o un sello. Por otra parte, gana 3 pesos si no aparece sello. Determinar la esperanza matemática del juego y si éste es favorable.

   Respuesta:
   $E[x] = -\frac{1}{4}$
   Por lo tanto, no es favorable

3. Un jugador lanza un dado. Gana 10 pesos si aparecen un cinco. Por otra parte, pierde 2 pesos si no aparece un cinco. Determinar la esperanza matemática del juego y si éste es favorable.

   Respuesta:
   $E[x] = 0$

   Por lo tanto, no es favorable

4. Un jugador lanza un dado. Gana 5 pesos si aparecen un número mayor que 4. Por otra parte, pierde 3 pesos si aparece un número menor o igual que 4. Determinar la esperanza matemática del juego y si éste es favorable.

   Respuesta:
   $E[x] = -\frac{1}{3}$

   Por lo tanto, no es favorable

5. Un jugador lanza un dado corriente. Si sale 1 o número primo, gana tantos cientos de pesos como marca el dado, pero si no sale número primo, pierde tantos cientos de pesos como marca el dado. Determinar la esperanza matemática del juego.

   Respuesta:
   $E[x] = 16.667$

6. Se imprimen 1000 boletos para una rifa donde el premio es de 500 pesos y cada boleto se vende en 3 pesos. ¿Cuál es la esperanza matemática de ganar el premio si se compra un boleto?

   Respuesta:

   $E[x] = -19.5$

Anexo 5.

Lista de cotejo para actividad en equipo.

Plantel: ____________________ Fecha de aplicación: ______________________
Integrantes del equipo: ____

Aspecto a evaluar del ejercicio en equipo.	Cumplimiento		Ponderación
	Sí	No	
Calcularon correctamente la probabilidad frecuentista.			
Identificaron los elementos de la fórmula.			
Obtuvieron correctamente lo que se espera ganar en el juego			
Obtuvieron correctamente cual es el pago del juego.			
Calcularon correctamente la esperanza matemática			
Hubo colaboración entre los integrantes del equipo.			

TOTAL:

Lista de cotejo para serie de ejercicios.

Plantel: ____________________ Fecha de aplicación: ______________________

Nombre del alumno: ____

Aspecto a evaluar (resolvieron correctamente cada uno de los ejercicios que involucran la esperanza matemática).	Cumplimiento		Ponderación
	Sí	No	
Ejercicio 1			
Ejercicio 2			
Ejercicio 3			
Ejercicio 4			
Ejercicio 5			
Ejercicio 6			

TOTAL:

Datos generales[1]					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Quinto
Ubicación del plantel	Alan Sac´jun, Mpio Chilon	**UAC**	Taller de Probabilidad y Estadística I		

Datos de la progresión del aprendizaje[2]			
Etapa de la progresión (Número)	6	**Tiempo total de ejecución**	6 horas
Enunciado de la progresión	Identifica el concepto de caminos aleatorios reconociendo su utilidad en situaciones diversas para visualizar el comportamiento de diferentes distribuciones de probabilidad favoreciendo el uso de tecnologías a su alcance por medio del trabajo colaborativo.		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje[3]	
Categoría	**C2.** Procesos de intuición y Razonamiento. **C3.** Solución de problemas y modelación.
Subcategoría	**C2S1.** Capacidad para observar y conjeturar. **C3S1**. Uso de modelos.

[1] Ingrese los datos generales de su centro de trabajo y de la Unidad de Aprendizaje Curricular

[2] Ingrese los datos de la progresión de aprendizaje a desarrollar
[3] Ingrese los elementos presentes en la progresión de aprendizaje a desarrollar

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje[4]	
Metas de aprendizaje.	**C2M1**. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C3M1.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y elaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.). - Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

Abordaje de la progresión del aprendizaje[5]				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	**El misterioso viaje del azar: una aventura de probabilidades y caminos aleatorios** El/La docente comparte información (verbal, diapositiva o impreso) como un detonante para "enganchar" al estudiantado logrando una introducción conceptual a las probabilidades y caminos aleatorios. **Anexo 1**. **Diagnóstico informal.**	60 minutos.	Proyector, pizarrón, plumones.	

[4] Ingrese los elementos presentes en la progresión de aprendizaje a desarrollar

[5] Planteé una estrategia didáctica para abordar la progresión de aprendizaje que fue seleccionado.

	El/La docente obtiene un diagnóstico general del grupo respecto a los caminos aleatorios de la información proporcionada, mediante las siguientes preguntas que los estudiantes contestan: **a)** ¿Por qué es importante estudiar los caminos aleatorios si los resultados individuales son impredecibles? **b)** ¿En qué ámbitos de la vida cotidiana se aplican los conceptos de probabilidad y caminos aleatorios? **c)** ¿Qué ventajas ofrece el uso de tecnologías al estudiar procesos aleatorios? **d)** ¿Qué papel juega la colaboración en la resolución de problemas probabilísticos? **e)** ¿Es posible tomar decisiones informadas basadas en fenómenos aleatorios? Explica cómo.	60 minutos.	Libreta, plumones, papel, rota folio.	No aplica.
Desarrollo	El/La docente expone los conceptos y aplicaciones de los caminos aleatorios. **Anexo 2**. En equipos, los estudiantes realizan la actividad de aplicación. **Anexo 3**.	60 minutos. 60 minutos.	Proyector, pizarrón, plumones. Libretas, lapiceros, colores.	Rúbrica de evaluación 1.

Cierre	El estudiantado se organiza en equipos para resolver problemas de caminos aleatorios. **Anexo 4**.	120 minutos	Libretas, lapiceros, colores.	Rúbrica de evaluación 2.

Fuentes de consulta

BIBLIOGRÁFICA	VIDEOGRÁFICA	PÁGINAS WEB
Béi, D. (2025). Taller de probabilidad y estadística I. Klik Soluciones Educativas S. A. de C. V.		FasterCapital. (2025, 3 de mayo). *Paseo aleatorio: un paso hacia la aleatoriedad : simulación de un paseo aleatorio en Excel*. Recuperado de https://fastercapital.com/es/contenido/Pas e o-aleatorio--un-paso-hacia-la-aleatoriedad-- simulacion-de-un-paseo-aleatorio-en- Excel.html McKee, A. (2025, 6 de marzo). *Paso a paso al azar: explorar el modelo de paseo aleatorio* [Tutorial en línea]. DataCamp. Recuperado de https://www.datacamp.com/es/tutorial/ran d om-walk

ELABORÓ: REVISÓ:

Neyser Darío Constantino López
Rigoberto Vázquez Suriano
Pascual López Peñate
Marco Antonio Méndez Sotomayor

Gutemberg Ramírez Gálvez
Humberto Aquino Espinosa
Richard Silvan Magaña

Anexo 1. El misterioso viaje del azar: una aventura de probabilidades y caminos aleatorios.

Imagina que lanzas una moneda al aire una y otra vez, sin detenerte. Cada vez que la moneda gira y cae, no puedes evitar preguntarte: ¿y si pudiera predecir cuántas veces saldrá águila o sol? Puede parecer un juego de suerte, un capricho del destino, pero, en realidad, las matemáticas tienen algo fascinante que decir sobre esto.

Ahora, imagina esto: ¿cómo hacen los analistas financieros para anticipar las impredecibles subidas y bajadas de la bolsa de valores?¿Y qué tal esos científicos que tratan de modelar la propagación de un virus entre la gente? ¿Son estos eventos realmente tan caóticos como parecen a simple vista? Aunque son situaciones azarosas, hay herramientas matemáticas que nos permiten poner un poco de orden en el caos: los caminos aleatorios y las distribuciones de probabilidad.

Imagina que estás perdido en un laberinto gigantesco. Cada vez que llegas a una intersección debes elegir aleatoriamente una dirección. Parece un poco confuso, ¿no? Claro, porque un solo intento puede ser un completo desastre, pero si repites el recorrido muchas veces, algo asombroso sucede: empiezas a ver patrones. Descubres cuáles son los caminos más comunes, los atascos, los puntos donde siempre te pierdes. ¡Lotería! Eso es lo que sucede cuando aplicas los caminos aleatorios en matemáticas: aunque cada paso individual sea incierto, al estudiarlos en su conjunto emergen patrones sorprendentes que te permiten predecir comportamientos a gran escala.

Y no creas que estos modelos son sólo para las ciencias abstractas. No es así; los caminos aleatorios están presentes en todos los rincones de tu vida: desde las decisiones cotidianas (¿debes tomar la calle de siempre o aventurarte por una nueva?), hasta los complejos sistemas económicos, la biología, la informática y, por supuesto, ¡la toma de decisiones en los juegos de azar!

Lo mejor de todo es que, cuando entiendes los caminos aleatorios y cómo funcionan las distribuciones de probabilidad, puedes crear simulaciones por computadora que te ayuden a predecir cómo se comportarán los procesos bajo la influencia del azar. Con un poco de práctica descubrirás que, aunque el mundo parezca estar gobernado por el caos, hay una estructura subyacente que puedes aprender a entender y, lo mejor de todo, ¡puedes usarla para tomar decisiones más informadas!

Al final de este recorrido por el misterio del azar, no sólo habrás resuelto problemas matemáticos con tu computadora, sino que habrás adquirido las herramientas para comprender cómo las probabilidades afectan tu vida cotidiana. ¿Listo para embarcarte en la aventura de descubrir cómo el azar, aunque parezca un laberinto, tiene patrones que puedes dominar?

Anexo 2. El docente expone los conceptos y aplicaciones de los caminos aleatorios. Paseo aleatorio: un paso hacia la aleatoriedad.

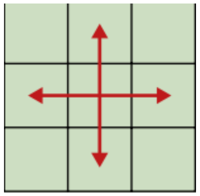
1. Conceptos de los caminos aleatorios.

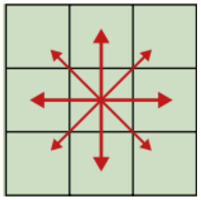
Imagina que te encuentras parado en medio de una viga de equilibrio y realizas el siguiente experimento aleatorio: cada cinco segundos lanzas una moneda, si sale **águila A** darás un paso a la izquierda; si sale **sol S** darás un paso hacia la derecha. Esto se conoce como un camino aleatorio, pues es una ruta definida por una serie de pasos aleatorios.

El experimento anterior se aplicará en una sola dimensión pues sólo se puede ir hacia la derecha o a la izquierda. Pero ahora, te bajas de la viga y ya en el suelo podrás moverte en dos dimensiones y seguir, por ejemplo, las siguientes reglas mediante el lanzamiento de la moneda en dos ocasiones:

Lanzamiento 1	Lanzamiento 2	Resultado
Sol	Sol	Un paso hacia adelante
Sol	Águila	Un paso a la izquierda
Águila	Sol	Un paso hacia la derecha
Águila	Águila	Un paso hacia atrás

Sin embargo, los caminos pueden aumentar si se consideran las diagonales. Esto se muestra en la siguiente figura.





El matemático británico **K arl Pearson** (1857-1936) inició la discusión relativa al concepto de caminos aleatorios en el año de 1905. En una publicación lanzó varias preguntas entre las que estaba la siguiente:

¿Cuál es la probabilidad de que un hombre al caminar al azar, alcance una distancia ***r*** mediante ***x*** pasos?

Tras una semana, el físico británico John William Strutt, **Lord Rayleigh** (1842-1919), respondió la pregunta. Este fue el comienzo de la investigación relativa a las propiedades del paseo al azar; esta investigación fue muy útil en el modelado de problemas en ciencias y estudios sociales.

Camino aleatorio. Es una secuencia de pasos discretos de longitud fija en direcciones aleatorias. Se trata de un proceso por el cual los objetos se mueven aleatoriamente y se alejan del punto de inicio.

Éstos se pueden clasificar en unidimensionales, bidimensionales, tridimensionales o de dimensión ***n*** es decir ***n***-dimensionales. Entre los escenarios de la vida real que se pueden modelar como caminos aleatorios destacan:

- El camino de una persona para llegar a su casa.
- Los movimientos de un animal que acecha a su presa.
- Las cotizaciones de acciones en la bolsa que aumentan y disminuyen.
- La trayectoria trazada por una partícula de agua a medida que se mueve a través de un medio.
- El comportamiento de un apostador en un casino.
- La propagación de epidemias en poblaciones.

- La búsqueda en internet. Google usa caminos aleatorios para clasificar a las páginas web (*algoritmo PageRank*).

Las principales características de estos caminos aleatorios son:

Dirección aleatoria	Estados discretos o continuos	Independencia de pasos
En cada paso, el movimiento puede ir en diferentes direcciones de acuerdo con una cierta posibilidad.	Los movimientos pueden ocurrir en un conjunto discreto de posiciones (como en el ejemplo inicial) o en un espacio continuo.	Cada paso es independiente del anterior.

Ejemplo 1.

Las moléculas de un gas se mueven aleatoriamente al chocar entre sí y con las paredes del recipiente que las contiene. Si rastreamos el movimiento de una sola molécula, su trayectoria será un camino aleatorio en tres dimensiones.

Modelos simples.

Camino aleatorio en una dimensión (en línea recta).

Este tipo de modelo consiste en una partícula que en cada caso se mueve una unidad hacia adelante o hacia atrás (o, por otro lado, a la izquierda o a la derecha).

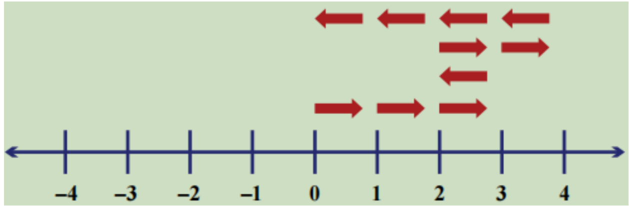
La probabilidad de ir hacia adelante es de P y la de ir hacia atrás de $1 - P$.

Ejemplo 2.

Retoma el ejemplo inicial de lanzar una moneda con **Sol – S** y **águila – A**, de forma que, si cae águila, caminas hacia la izquierda y si cae sol, lo haces hacia la derecha. Si se lanza la moneda en **10** ocasiones, se describe un camino aleatorio.

Solución

Asume que se obtienen los siguientes resultados: ***S***, ***S***, ***S***, ***A***, ***S***, ***S***, ***A***, ***A***, ***A***, ***A***. Esto generaría el camino aleatorio: derecha, derecha, derecha, izquierda, derecha, derecha, izquierda, izquierda, izquierda, izquierda. Si se inicia en la posición $x = 0$, esto se representa como sigue:



Al considerar ese resultado, terminarás en la posición inicial, es decir $x = 0$. Debido a que las probabilidades de moverse a la derecha o a la izquierda son iguales, entonces se tendrá un paseo simétrico al azar, en el que, de forma general, se terminará en el punto de inicio.

Camino aleatorio en dos dimensiones (en el plano).

En cada paso, el objeto puede moverse en cuatro direcciones: arriba, abajo, izquierda o derecha con igual probabilidad.

Ejemplo 3.

Un insecto está en la posición $(0,0)$ de una cuadrícula y en cada paso puede moverse en una de las cuatro direcciones con probabilidad $1/4$. Si da 3 pasos, ¿cuántas trayectorias distintas puede seguir?

Solución

Ya que en cada paso hay 4 opciones, el número total de trayectorias posibles es $4^3 = 64$.

Caminos aleatorios en redes

Son modelos que describen movimientos aleatorios en estructuras compuestas por nodos y enlaces; se consideran fundamentales para el análisis de sistemas complejos como las redes sociales, el transporte y la propagación de información.

Un camino aleatorio en una red es un proceso en el que un agente (como una partícula, un mensaje o un usuario) se desplaza entre los nodos de la red y sigue reglas de probabilidad.

Este proceso presenta las siguientes características:

- **Espacio de estados.** La red está formada por nodos (vértices) conectados por enlaces (aristas).
- **Estacionariedad.** Con el tiempo, algunos modelos alcanzan una distribución de probabilidad estable sobre los nodos visitados.
- **Reglas de transición.** En cada paso, el agente elige un nodo vecino con cierta probabilidad.

Ejemplo 4.

Considera que un usuario de una red social sigue un enlace al azar cada vez que visita un perfil. Después de muchas visitas, ¿qué perfiles tendrá más probabilidad de visitar?

Esto se relaciona con la *distribución estacionaria* de un camino aleatorio en la red.

Modelos de caminos aleatorios en redes.

Caminos aleatorios simples. En este modelo, en cada paso el agente selecciona un nodo vecino con probabilidad uniforme.

Ejemplo 5.

- **Movimiento en una red cuadrada**. Si un caminante está en un nodo con 4 vecinos, cada uno tiene una probabilidad de ¼ de ser visitado en el siguiente paso.

- **Caminos aleatorios con sesgo**. Las probabilidades de transición dependen de factores como pesos en los enlaces o preferencias del caminante.

Ejemplo 6.

a) Un usuario en una red social es más propenso a visitar nodos con más conexiones.

b) En un mapa de carreteras, los caminos con menos tráfico pueden ser los preferidos.

Caminos aleatorios en redes dirigidas

Si los enlaces tienen dirección (como en las redes de citas o de tráfico), el caminante sólo puede moverse en ciertas direcciones.

Ejemplo 7.

En una red de páginas web, si una página ***A*** enlaza a una ***B***, pero no al revés, un usuario sólo podrá moverse en una dirección.

Tiempo de primer retorno

Es el tiempo esperado para que un caminante vuelva a un nodo específico por primera vez.

Ejemplo 8.

Si un taxi circula al azar en una ciudad, ¿cuánto tiempo pasará antes de que vuelva a la estación central?

Cobertura de la red

Es el tiempo esperado para que un caminante visite todos los nodos de la red al menos una vez.

Ejemplo 9.

Si un robot explora un mapa desconocido moviéndose al azar, ¿cuánto tardará en visitar todas las áreas?

Aplicaciones y simulación

Los caminos aleatorios en redes pueden simularse en computadoras para estudiar su comportamiento.

2. Aplicaciones de los paseos aleatorios.

Los caminos aleatorios son un concepto fundamental en la teoría de la probabilidad, y representan un proceso en el que una entidad da pasos en direcciones aleatorias, cada paso independiente del anterior.

Este proceso aparentemente simple tiene profundas implicaciones en varios campos, desde la física hasta las finanzas, e incluso en procesos biológicos. La belleza de los caminos aleatorios radica en su imprevisibilidad y en los patrones que emergen de esta aleatoriedad a lo largo del tiempo. Sirven como una poderosa herramienta para modelar y comprender sistemas complejos, donde numerosas variables e incertidumbres inherentes dificultan el análisis determinista.

Física y Química: En física, los caminos aleatorios describen el movimiento de partículas que se difunden a través de un medio, un proceso conocido como movimiento browniano. Este concepto es crucial para comprender fenómenos como la propagación de contaminantes en la atmósfera o el movimiento de moléculas en un líquido. En química, los caminos aleatorios modelan la cinética de reacción, donde la probabilidad de colisiones moleculares depende del movimiento aleatorio de las moléculas.

Finanzas: el mercado de valores a menudo se modela como un camino aleatorio, lo que refleja la naturaleza impredecible de los precios de las acciones. La hipótesis del paseo aleatorio sugiere que los precios de las acciones siguen una trayectoria aleatoria y, por tanto, son inherentemente impredecibles, lo que hace imposible superar consistentemente al mercado mediante operaciones a corto plazo.

Biología: En biología, los caminos aleatorios describen los patrones de alimentación de los animales. Los animales a menudo se mueven siguiendo un patrón aleatorio cuando buscan comida, lo que puede modelarse como una caminata aleatoria. Este comportamiento maximiza las posibilidades de encontrar fuentes de alimentos en un entorno donde la ubicación de los alimentos es incierta.

Ciencias de la Computación: los caminos aleatorios tienen aplicaciones en el diseño de algoritmos, particularmente en algoritmos aleatorios y métodos de Monte carlo. Estos métodos utilizan la aleatoriedad para resolver problemas que podrían ser deterministas en principio pero que son demasiado complejos para soluciones sencillas.

Matemáticas: En matemáticas, los caminos aleatorios se estudian para comprender las propiedades de los procesos estocásticos. Se utilizan para resolver problemas relacionados con la teoría de la percolación, la teoría del potencial y las funciones armónicas.

Ejemplo en finanzas: considere un modelo simplificado del precio de una acción que sube 1 unidad o baja 1 unidad con la misma probabilidad en cada paso de tiempo. A lo largo de muchos intervalos de tiempo, la trayectoria del precio de las acciones se puede simular como un paseo aleatorio. Si bien los movimientos individuales son impredecibles, la distribución general de posibles caminos puede analizarse probabilísticamente.

Ejemplo en biología: una hormiga que busca comida podría moverse siguiendo un patrón de caminata aleatorio. Si encuentra comida, regresa directamente al nido dejando un rastro de feromonas. Otras hormigas siguen este rastro, reforzándolo si encuentran comida, lo que conduce a un camino de búsqueda de alimento optimizado.

Los paseos aleatorios proporcionan un marco versátil para modelar la aleatoriedad en varios sistemas. Sus aplicaciones abarcan múltiples disciplinas, ilustrando la interconexión de diferentes campos a través de la lente de la probabilidad. Al simular un paseo aleatorio en Excel, se puede visualizar este concepto y obtener una apreciación más profunda del papel de la aleatoriedad en el mundo que nos rodea.

Anexo 3. En equipos, los estudiantes realizan la actividades de aplicación. ACTIVIDAD 1.

1. En equipos de tres, realicen los pasos de cada inciso.

a) Consigan los siguientes materiales:

- Una moneda
- Papel cuadriculado
- Lápiz

b) Dibujen una recta numérica en el papel cuadriculado y marquen la posición inicial en ***x* = 0. c)** Lancen la moneda:

- **Águila** → Avanzan **1** paso a la derecha **(+1)**.
- **Sol** → Avanzan **1** paso a la izquierda **(1)**.

d) Repitan el proceso 20 veces y registren la posición final.

e) Comparen su resultado con los de otros compañeros.

f) Responde.

- ¿La posición final siempre es la misma?
- ¿Cómo cambia el resultado si aumentas el número de pasos?

ACTIVIDAD 2.

Consigan los siguientes materiales:

- Cartulina y marcadores
- Cartas con nombres de ciudades o puntos de una red
- Dados

a) Dibujen un mapa con varias ciudades conectadas por caminos.

b) Coloquen un marcador en una ciudad de inicio.

c) Lancen un dado y muévanse a una ciudad vecina al azar.

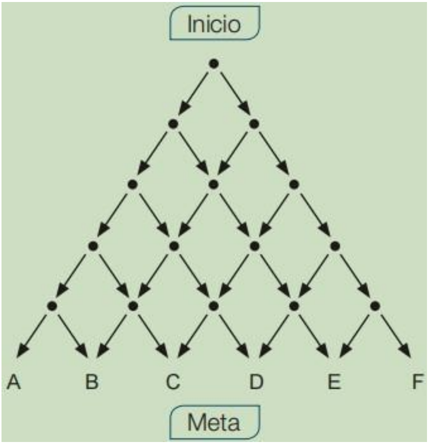
d) Registren en qué ciudades cae el caminante con el tiempo.

e) Responde:

- ¿Hay ciudades en las que el caminante pasa más tiempo?
- ¿Qué sucede si algunas conexiones tienen más peso (mayor probabilidad de ser elegidas)?

Anexo 4. El estudiantado se organiza en equipos para resolver problemas de caminos aleatorios. **PROBLEMA 1.**

Analiza el siguiente diagrama y luego responde.



a. ¿Cuántos caminos diferentes hay desde el inicio hasta la meta B? Marca 2 caminos con colores distintos.

b. ¿A cuál(es) de las metas se puede llegar solamente por un camino?

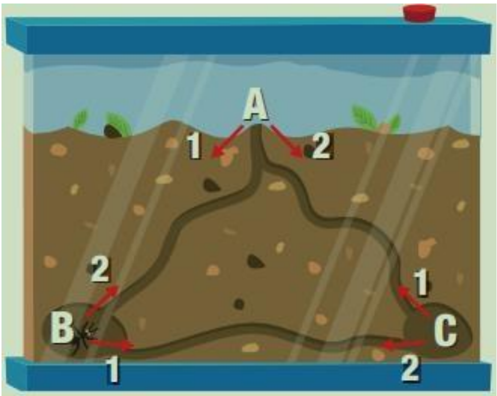
c. ¿A cuál de las metas se puede acceder por mayor cantidad de caminos?

d. ¿Qué conclusión puedes establecer respecto de la ubicación de las metas y la cantidad de caminos que unen el inicio y cada una de ellas?

PROBLEMA 2.

Analiza la siguiente información y luego resuelve.

Una hormiga se encuentra en el punto A y se mueve a los otros puntos en forma aleatoria. Además, se sabe que la probabilidad de desplazarse por el camino 1 es el triple que la probabilidad de elegir el camino 2.

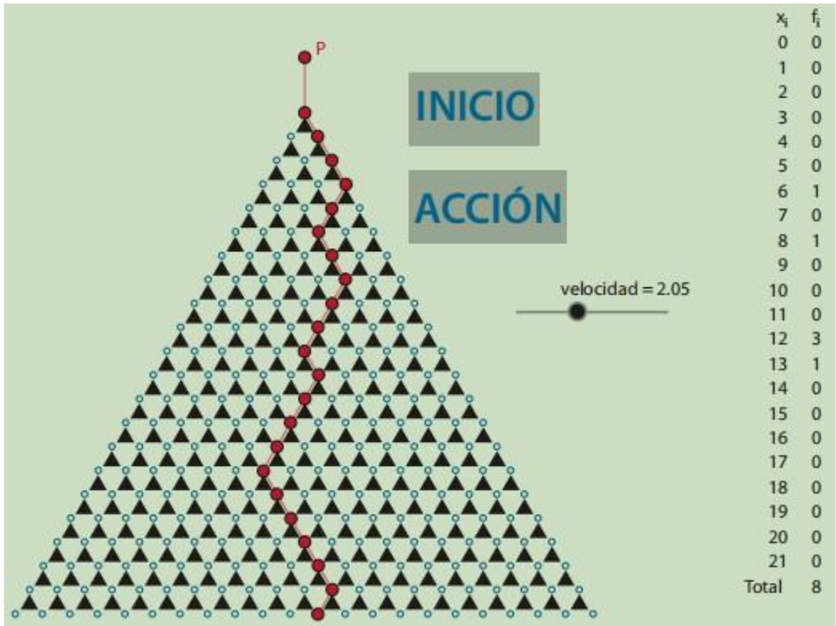


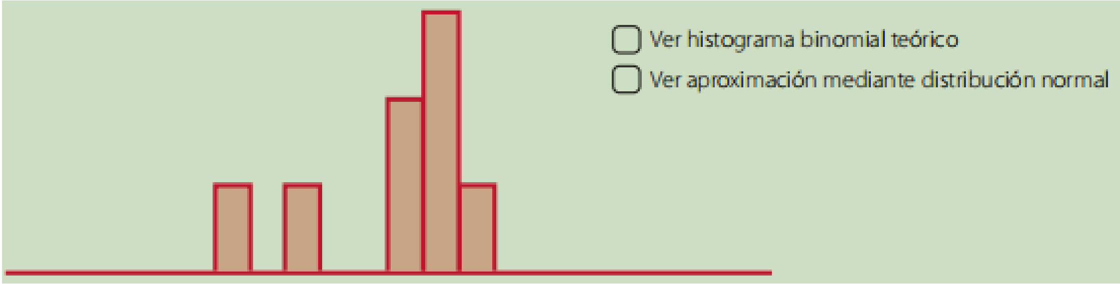
a. ¿En qué posición es más probable que se encuentre la hormiga después de 2 etapas?

b. Si la hormiga tuviese igual probabilidad de desplazarse por el camino 1 que por el camino 2, ¿en qué posición sería más probable que se encuentre luego de la segunda etapa?

PROBLEMA 3.

Analiza la aplicación del uso de *software* propuesta en tu Libro Web en la cual encontrarás una máquina de Galton virtual, como la que se muestra en la imagen. Luego, responde las preguntas.





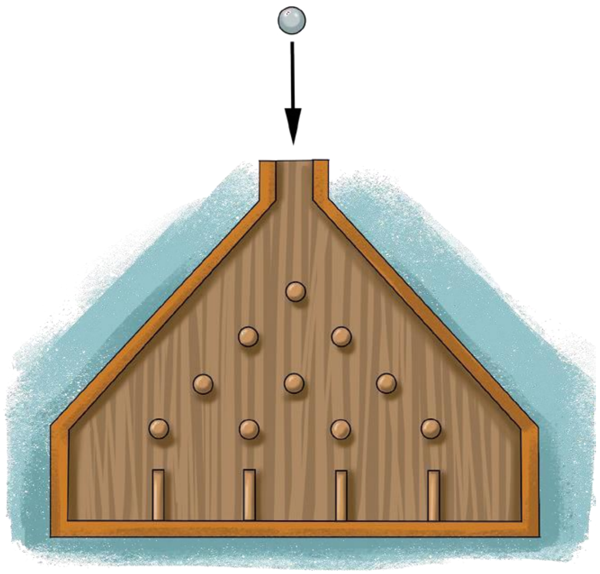
a. ¿Cuántos caminos posibles puede tomar una bolita? ¿Cómo lo supiste?

b. En esta máquina, ¿en qué casilleros crees que se concentrarán las bolitas que ingresan en la parte superior?

c. Presiona el botón de inicio y luego el de acción para simular 100 lanzamientos de bolitas. Observa la tabla de frecuencias que aparece al costado derecho de la máquina. ¿Se cumplió tu conjetura anterior?

PROBLEMA 4.

Utiliza la siguiente tabla de Galton y simula el camino de la bolita según se indica:



• Lanza una moneda cada vez que la bolita toque un clavo. Le corresponderá ir hacia la derecha si sale sello, y a la izquierda en caso contrario, y así hasta que la bolita llegue a un casillero.

• Registra en qué casillero cayó la bolita y sigue con otra.

• Realiza este experimento simulando 5 bolitas, luego 10 bolitas y finalmente 15 bolitas.

a. Completa la tabla con las frecuencias obtenidas en cada simulación.

Simulación con 5 bolitas		
Casillero	Frecuencia	Frecuencia relativa (f_r)
x_1		
x_2		
x_3		
x_4		
x_5		

Simulación con 10 bolitas		
Casillero	Frecuencia	Frecuencia relativa (f_r)
x_1		
x_2		
x_3		
x_4		
x_5		

Simulación con 15 bolitas		
Casillero	Frecuencia	Frecuencia relativa (f_r)
x_1		
x_2		
x_3		
x_4		
x_5		

b. ¿Cómo se comportan las frecuencias relativas en los tres casos? ¿Existe algún patrón en los tres experimentos? Explica.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN.

Rúbrica de evaluación 1. En equipos, los estudiantes realizan la actividad de aplicación (Anexo 3).

Criterio de evaluación	Excelente	Bueno	Bajo

Comprende los conceptos básicos de experimentos aleatorios	Demuestra un conocimiento profundo de los conceptos y puede explicarlos con claridad	Comprende la mayoría de los conceptos y puede aplicarlos correctamente en ejemplos simples	Tiene dificultades para comprender los conceptos básicos y su aplicación

Puede diseñar y llevar a cabo experimentos aleatorios	Diseña y realiza experimentos de forma independiente y precisa	Puede diseñar y realizar experimentos con alguna ayuda y logra resultados aceptables	Tiene dificultades para diseñar y realizar experimentos y obtiene resultados poco significativos
Interpreta los resultados de los experimentos aleatorios	Es capaz de interpretar correctamente los resultados y sacar conclusiones válidas	Puede interpretar la mayoría de los resultados de forma adecuada, aunque con algunos errores	Tiene dificultades para interpretar los resultados y sacar conclusiones válidas
Aplica los conceptos de probabilidad en experimentos aleatorios	Puede aplicar con precisión y de forma independiente los conceptos de probabilidad en diversos contextos	Puede aplicar los conceptos de probabilidad correctamente en la mayoría de los casos	Tiene dificultades para aplicar los conceptos de probabilidad de manera precisa y correcta
Utiliza estrategias adecuadas para analizar y resolver problemas relacionados con experimentos aleatorios	Utiliza una variedad de estrategias eficaces y puede resolver problemas complejos con éxito	Utiliza estrategias adecuadas y puede resolver problemas de forma adecuada, aunque con cierta dificultad en ocasiones	Tiene dificultades para utilizar estrategias adecuadas y resolver problemas relacionados con experimentos aleatorios
Presentación y organización	La presentación es clara y organizada con un lenguaje preciso y correcto	La presentación es adecuada, aunque puede haber algunas imprecisiones o falta de organización	La presentación es confusa, desorganizada o con un lenguaje inadecuado

Rúbrica de evaluación 2. El estudiantado se organiza en equipos para resolver problemas de caminos aleatorios (Anexo 4).

Criterios de evaluaci	Excelente	Bueno	Aceptable	Bajo

ón				

Comprensión de los conceptos de experimentos aleatorios	Demuestra un entendimiento sólido y preciso de los conceptos, siendo capaz de aplicarlos correctamente en diferentes situaciones	Comprende la mayoría de los conceptos, aunque puede presentar algunos errores menores en su aplicación	Demuestra una comprensión básica de los conceptos, pero con algunas dificultades en su aplicación	Muestra una comprensión limitada o incorrecta de los conceptos
Capacidad para identificar el espacio muestral y los eventos en un experimento	Identifica correctamente el espacio muestral y los eventos asociados en todos los casos presentados	Identifica la mayoría de los espacios muestrales y eventos, con algunos errores ocasionales	Puede identificar algunos espacios muestrales y eventos, pero con dificultades y con errores frecuentes	Tiene dificultades para identificar el espacio muestral y los eventos, frecuentemente cometiendo errores
Conocimiento de la noción de probabilidad y su cálculo	Demuestra un conocimiento sólido de la noción de probabilidad y puede calcular la correctamente en diferentes contexto	Tiene un conocimiento básico de la noción de probabilidad y puede realizar cálculos simples, aunque puede cometer algunos errores	Comprende la noción de probabilidad, pero muestra dificultades en su cálculo y puede cometer errores frecuentes	Muestra un conocimiento limitado de la noción de probabilidad y tiene dificultades para realizar cálculos